Differential Calculus in Characteristic P>O and de Rham-Witt Complex (Recent Topics in Algebraic Geometry)

RAYNAUD, MICHEL; SUWA, NORIYUKI

数理解析研究所講究録
409巻 1980年 3-22

differential calculus in characteristic $p>0$ and de Rham-Witt complex.

Paris Sud　　Michel Raynaud
(諏訪紀幸 記)

本稿はRaynaud教授の9月20日東京大学での講演と10月6日京都大学数理解析研究所での講演をもとにまとめたものです.

1. historical notes

Xをcompact複素多様体, $\Omega_X^\cdot$をXのde Rham complexとする.
このとき, 重要なspectral sequence

$$E_1^{ij}=H^j(X,\Omega_X^i)\Rightarrow H^*(X,\Omega_X^\cdot)\simeq H^*(X,\mathbb{C})$$

が存在する. XがKählerなら, 上のspectral sequenceはE_1で退化し, Hodge number $h^{ij}=\dim_{\mathbb{C}} H^j(X,\Omega_X^i)$は$X$の重要な不変量である. 同様の議論を代数多様体に対して試みるのは興味深いことであるが, de Rham cohomology $H_{DR}^*(X/k)=H^*(X,\Omega_{X/k}^\cdot)$は標数0のときは求められる良い性質を持っているのに比べて, 標数$p>0$のときはもはや良い性質を持たない(例えば, 良いBetti numberを与えない).

この方面での最初の試みはSerreのWitt vector cohomology

であろう(Serre[11]'58):kを標数$p>0$のalgebraically closed field, Xをkの上に定義された代数多様体,また,$W=W(k)$をkの上のWitt vectorの環とする. Xのaffine open Uに$A=\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$の上のWitt vectorの環$W(A)$を対応させることによって$X$の上のformal sheaf $W(X)$が定義される. このとき,$H^1(X,W(X))$はW加群. Serreは$H^1(X,W(X))$がXのHodge number $h^{0,i}$を与えるものであろうと考えたが,実際,Xがkの上にsmooth completeでWの上へのlifting $\mathfrak{X}$を持つとき,$\dim_K H^1(X,W(X))\otimes_W K$,$K$は$W$の分数体,は$\mathfrak{X}$の"Hodge number $h^{0,i}$"と一致する. また,Xがkの上にsmooth completeなら,$H^1(X,W(X))$はfree W-module of finite typeとなることを示した. さらに,SerreはXがkの上にsmooth completeなら一般に$H^1(X,W(X))$が有限型W加群となることを予想したが,ほどなく反例を見出した. (Serre[12])

<u>remark</u> 1.1. Xがkの上にsmooth completeのとき,$P=\mathrm{Pic}_{X/k}$をXのPicard schemeとすれば,$\{H^1(X,W(X)),F,V\}$はformal completion $\widehat{(P^0)_{red}}$のCartier moduleに対応する.

これから十年程進展が見られなかったが,MonskyとWashnitzerはdifferentialの標数pから標数0へのliftingについての系統的な研究を行ない,formal cohomologyを定義した(Monsky-Washnitzer[7]'68-'70). また,GrothendieckはMonsky-Washnitzerの仕事に着目し,schemeのinfinitesimal siteを定義し,標数0のとき,infinitesimal cohomologyがsmooth varietyに対してde Rham cohomologyを与えることを示した. しかし, 標数$p>0$の場合, infinitesimal siteでは不充分であることから, schemeのcrystalline siteを定義し, crystalline cohomologyが良いp-adic cohomologyを与えるであろうと述べた(Grothendieck [5]). 実際, Berthelotはcrystalline cohomologyが良いp-adic cohomologyであることを示した：例えば, kを標数$p>0$のperfect field, Xをsmooth proper k-schemeとすれば, $H^*(X/W)_{cris}$は有限型W加群；また, $b_i = \dim_K H^i(X/W)_{cris} \otimes_W K$はWeil-Deligneの$l$-adic Betti numberと一致する；また, XがWの上へのlifting $\mathfrak{X}$を持つとき, $H^*(X/W)_{cris} \simeq H^*_{DR}(\mathfrak{X}/W)$, etc. (Berthelot [2]).

しかし, Hodge numberを定義するためには, spectral sequenceから定義されるfiltrationが必要であるが, Grothendieck-Berthelotのcrystalline cohomologyにexplicitにcomplexで定義したものではなかった. Blochは標数と次元の制限はあるにしても, K-theoryを使ってcrystalline cohomologyを与えるcomplexを構成した.(Bloch[4])

<u>remark</u> 1.2 加藤和也は標数と次元の制限が不要であることを述べている.

さらに, DeligneとIllusieはK-theoryを使わずに, 一般のschemeに対してcrystalline cohomologyを与えるcomplexとしてde Rham-Witt complexを定義した (Illussie [6]). de Rham-Witt complexはSerreのWitt vector cohomologyとGrothendieck-Berthelotのcrystalline cohomologyとの自然な結び付きをも与えている.

<u>remark</u> 1.3 Sをscheme, XをS-schemeとする. XのSに関するinfinitesimal site $\mathrm{Inf}(X/S)$は次のように定義される.

(1) object: S-morphism $U \to T$, UはXのZariski open, $U \to T$は$\mathcal{O}_T$のnil-Ideal $\mathcal{J}$によって定義されるclosed immersion;

(2) morphism: commutative diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ U' \arrow[r] & T' \end{tikzcd}$$

$U \to U'$はinclusion, $T \to T'$はS-morphism;

(3) covering: $\{(U_i \to T_i) \to (U \to T)\}_i$, 各$T_i \to T$がopen immersionで$\bigcup_i T_i = T$.

<u>remark</u> 1.4. Ogusはsingular varietyに対してもinfinitesimal cohomologyがde Rham cohomologyを与えることを示している(Ogus [10]).

<u>remark</u> 1.5. $(S, \mathcal{J}, \gamma)$をPD-scheme, XをS-schemeとし, γがXに拡張できると仮定する. XのSに関するcrystalline site $\mathrm{Cris}(X/S)$は次のように定義される.

(1) object: $(U \to T, \delta)$, UはXのZariski open, $U \to T$は$\mathcal{O}_T$のnil-Ideal $\mathcal{J}$によって定義されるclosed S-immersion, δはγとcompatibleな$\mathcal{J}$の上のPD-structure;

(2) morphism : commutative diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ U' \arrow[r] & T' \end{tikzcd}$$

$U \to U'$ は inclusion. $(T, \mathcal{J}, \delta) \to (T', \mathcal{J}', \delta')$ は PD-structure と compatible な S-morphism ;

(3) covering : $\{(U_i \to T_i, \delta_i) \to (U \to T, \delta)\}_i$, 各 $T_i \to T$ は open immersion で $\bigcup T_i = T$

<u>remark</u> 1.6. k を標数 $p > 0$ の体, $W = W(k)$ を k の上の Witt vector の環とする. このとき, $\gamma_i(a) = a^i/i!$ によって pW の上の divided powers $\gamma = (\gamma_i)_{i \geq 0}$ が定義される. また, $p^n W$ は pW の PD-subideal なので, $W_n = W/p^n W$ の上に PD-structure が γ から誘導される. 以下, W, W_n を PD-structure γ を持つ PD-ring と考える. さらに, $S = \mathrm{Spec}\, W$, または, $\mathrm{Spec}\, W_n$, X を S-scheme とすれば, γ は X に拡張できる.

以下, de Rham-Witt complex の構成と基本的な性質について述べる. また, crystalline cohomology については Berthelot [2], Berthelot-Ogus [3] を, また, de Rham-Witt complex については Illusie [6] を見られたい.

2 de Rham-Witt complexの構成

kを標数$p>0$のperfect field, $W=W(k)$をkの上のWitt vectorの環, $W_n=W/p^nW$とする.

定理2.1.(Poincaré lemma) $S=\mathrm{Spec}\,W_n$. X, Yをsmooth affine S-scheme, $f, g: X\to Y$をS-morphismとし, $f^*, g^*: \Omega^{\cdot}_{Y/S}\to\Omega^{\cdot}_{X/S}$をそれぞれ$f, g$から誘導されるde Rham complexの準同型とする. このとき, $f\equiv g\ (\mathrm{mod}\ p)$なら, 各$i$に対して$\underline{H}^i(f^*)=\underline{H}^i(g^*): \underline{H}^i(\Omega^{\cdot}_{Y/S})\to\underline{H}^i(\Omega^{\cdot}_{X/S})$となる. 特に, fがmod pで同型なら, $\underline{H}^i(f^*)$は同型.

実際, YはSの上にsmoothなので, Yの各点yに対してyのopen neighbourhood U, 及び, 整数$r\geq 0$, 及び, étale S-morphism $U\to S[T_1,\dots,T_r]$が存在する. 局所性から, étale S-morphism $\varphi: Y\to Z=S[T_1,\dots,T_r]$が存在すると仮定してよい. このとき, A, B, CをそれぞれX, Y, Zのaffine ringとし, また, f, g, φに対応する環の準同型をまたf, g, φで表わす. $t_i=\varphi(T_i)$とおけば, 仮定から, $g(t_i)=f(t_i)+pa_i$, a_iはAの元, と書ける. ここで, $A\langle T\rangle$をTを不定元とするpolynomial A-algebra with divided powersとすれば, 対応$T_i\to f(t_i)+Ta_i$によってW_n-代数の準同型$\alpha: C\to A\langle T\rangle$が, また, 対応$T^{[n]}\to 0$ (あるいは, $T^{[n]}\to p^{[n]}1_A$) $(n>0)$によってA代数の準同型$u: A\langle T\rangle\to A$ (あるいは, $v: A\langle T\rangle\to A$)が定義される. このとき, $u\circ\alpha=f\circ\varphi$, $v\circ\alpha=g\circ\varphi$. ここで, $(T^{[l]})^m=\frac{(lm)!}{(l!)^m}T^{[lm]}$ $(l>0)$, $p^nA=0$なので, $A\langle T\rangle$のaugmentation ideal $\bigoplus_{l>0}AT^{[l]}$はnilideal. したがって, BはCの上にétaleなので, $f=u\circ\beta$, $\beta\circ\varphi=\alpha$となるような環の準同型$\beta: B\to A\langle T\rangle$が一意的に存在する. このとき, $v\circ\beta\circ\varphi=g\circ\varphi$. BはCの上に

étale なので，$v \circ \beta = g$. ここで，$\Omega^i_{A\langle T\rangle/W_n[\,]} = \Omega^i_{A/W_n} \otimes_A A\langle T\rangle \oplus dT \wedge (\Omega^{i-1}_{A/W_n} \otimes_A A\langle T\rangle)$, $d^i(T^{[n]}\omega_i + T^{[m]}dT\wedge\eta_{i-1}) = (T^{[n-1]}dT\wedge\omega_i + T^{[n]}d\omega_i) - T^{[m]}dT\wedge d\eta_{i-1}$, ω_i, η_{i-1} はそれぞれ Ω^i_{A/W_n}, Ω^{i-1}_{A/W_n} の元，として A 加群の complex $\Omega^\cdot_{A\langle T\rangle/W_n[\,]}$ を得る．さらに，$u^*, v^*: \Omega^\cdot_{A\langle T\rangle/W_n[\,]} \to \Omega^\cdot_{A/W_n}$ をそれぞれ u, v から誘導される complex の準同型とし，また，$K(a + dT\wedge b) = \int_0^p b(t)\,dt$ (i.e. $K(T^{[m]}dT\wedge\eta_{i-1}) = p^{[m+1]}\eta_{i-1}$) によって準同型 $K: \Omega^i_{A\langle T\rangle/W_n[\,]} \to \Omega^{i-1}_{A/W_n}$ を定義すれば，$v^* - u^* = Kd + dK$ となる．したがって，$g^* - f^* = (Kd + dK)\circ\beta^*$. これから結論を得る．(Katz による証明).

remark 2.2 $\{T^{[0]} = 1, T^{[1]}, T^{[2]}, \dots\}$ を基底とする free A-module $A\langle T\rangle$ の上に，$T^{[n]}T^{[m]} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}T^{[n+m]}$ によって乗法を定義すれば，$A\langle T\rangle$ は A 代数となる．このとき，$\gamma_m(T^{[1]}) = T^{[m]}$ によって $A\langle T\rangle$ の augmentation ideal $\bigoplus_{n>0} A.T^{[n]}$ の上の divided powers $\gamma = (\gamma_m)_{m\geq 0}$ が定義される．PD-A 代数 $A\langle T\rangle$ を T を不定元とする polynomial A-algebra with divided powers．または，PD-polynomial A-algebra とよぶ．

次に，X を smooth k-scheme とする．このとき，定理 2.1. から，同型 $\underline{H}^i(X/W_n)|U \simeq \underline{H}^i_{DR}(U_n/W_n) = \underline{H}^i(\Omega^\cdot_{U_n/W_n})$，U は X の affine open, U_n は U の W_n の上への lifting，によって X の上の (Zariski 位相に対する) W_n 加群の層 $\underline{H}^i(X/W_n)$ が定義される．さらに，U を X の affine open, U' を U の W の上への flat p-adically complete な lifting とする．このとき，$U'_n = U' \otimes_W W_n$ とすれば，complex の exact sequence

$$0 \longrightarrow \Omega^\cdot_{U'/W} \xrightarrow{p^n} \Omega^\cdot_{U'/W} \longrightarrow \Omega^\cdot_{U'_n/W_n} \longrightarrow 0$$

を得る. したがって, x を $Z\Omega^i_{U'_n/W_n}$ の section, x' を $x'\to x$ となる $\Omega^i_{U'/W}$ の section とすれば, $dx'=p^n y'$ となる $Z\Omega^{i+1}_{U'/W}$ の section y' が存在する. y を y' の $\Omega^{i+1}_{U'_n/W_n}$ における image とすれば, 対応 $x\to y$ によって層の準同型 $d_{U'}: \underline{H}^i_{DR}(U'_n/W_n)\to\underline{H}^{i+1}_{DR}(U'_n/W_n)$ が定義される. ここで, U'' を U の W の上への flat p-adically complete な lifting, $f: U'\to U''$ を W-morphism とし, $U''_n=U''\otimes_W W_n$ とすれば, commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^i_{DR}(U'_n/W_n) \arrow[r, "d_{U'}"] & \underline{H}^{i+1}_{DR}(U'_n/W_n) \\
\underline{H}^i_{DR}(U''_n/W_n) \arrow[r, "d_{U''}"] \arrow[u, "f^*"] & \underline{H}^{i+1}_{DR}(U''_n/W_n) \arrow[u, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

を得る. これから, 層の準同型 $d: \underline{H}^i(X/W_n)\to\underline{H}^{i+1}(X/W_n)$ を得る. このとき, 明らかに, $d^2=0$. これから, $\underline{H}^*(X/W_n)$ は X の上の graded differential W_n-algebra の層となる

<u>remark</u> 2.3 A を(可換)環, $B=\bigoplus_{i\geq 0}B^i$ を positively graded A-algebra, また, $d=(d^i: B^i\to B^{i+1})_{i\geq 0}$ を A準同型の族とする.

(1) $xy=(-1)^{ij}yx$, x, y はそれぞれ B^i, B^j の元;

(2) $x^2=0$, x は B^i, i は奇数, の元;

(3) $d^{i+1}\circ d^i=0$;

(4) $d^{i+j}(xy)=(d^ix)y+(-1)^i x\,dy$, x, y はそれぞれ B^i, B^j の元,

が成立するとき, (B, d) は graded differential A-algebra であるという. 例えば, R を (commutative) A-algebra とすれば, de Rham complex $\Omega^{\cdot}_{R/A}$ は graded differential A-algebra.

次に，$W_n(X)$ を X の上の長さ n の Witt vector の層，F を $W_n(X)$ の Frobenius endomorphism とする．X の W_n の上への smooth lifting X_n が存在すると仮定する．このとき，$a=(a_0,\dots,a_{n-1})$ を $W_n(X)$ の local section，$\tilde{a}_0,\dots,\tilde{a}_{n-1}$ をそれぞれ $a_0,\dots,a_{n-1}$ の X_n の上への lifting とすれば，対応 $a \to \tilde{a}_0^{p^{n-1}}+p\tilde{a}_1^{p^{n-2}}+\cdots+p^{n-1}\tilde{a}_{n-1}$ によって環の層の準同型 $\tilde{\omega}_{n-1}: W_n(X)\to \mathcal{O}_{X_n}$ が定義される．このとき，準同型の結合 $\tilde{\omega}_{n-1}\circ F: W_n(X)\to W_n(X)\to \mathcal{O}_{X_n}$ の image は differential $d: \mathcal{O}_{X_n}\to \Omega^1_{X_n/W_n}$ の kernel に含まれる．これから W_n-代数の層の準同型 $\theta_n: W_n(X)\to F^n_* \underline{H}^0(X/W_n)\simeq F^n_*\underline{H}^0_{DR}(X_n/W_n)$，$F$ は $W_n=W_n(k)$ の Frobenius endomorphism，を得る．一般の場合，X の上の局所化と貼り合わせの議論により準同型 $\theta_n: W_n(X)\to F^n_*\underline{H}^0(X/W_n)$ が定義される．このとき，

<u>命題</u> 2.4　θ_n は同型

graded differential W_n-algebra の層 $F^n_* H^*(X/W_n)$ を X の level n の de Rham-Witt complex とよび，これを $W_n\Omega^\cdot_X$ で表わす．命題 2.4 から，$W_n\Omega^0_X$ は $W_n(X)$ に同一視される．また $W_1\Omega^\cdot_X$ は de Rham complex $\Omega^\cdot_{X/k}$ に他ならない．

<u>命題</u> 2.5　graded differential W_n-algebra $W_n\Omega^\cdot_X$ は $W_n(X)$ によって生成される．i.e. 任意の $W_n\Omega^i_X$ の local section ω は $\sum a\, db_1\wedge\dots\wedge db_i$，$a, b_i$ は $W_n\Omega^0=W_n(X)$ の local section，の形で書ける．

これから，restriction $R: W_n(X)\to W_{n-1}(X)$ によって graded differential algebra の準同型 $R: W_n\Omega^\cdot_X\to W_{n-1}\Omega^\cdot_X$ が定義される．

graded differential algebra $W\Omega^{\cdot}_X = \varprojlim W_n\Omega^{\cdot}_X$ を X の de Rham-Witt complex とよぶ. 定義から, $W\Omega^0_X$ は X の上の Witt vector の層 $W(X)$ に同一視できる. ここで, 各 transition map $R: W_n\Omega^{\cdot}_X \to W_{n-1}\Omega^{\cdot}_X$ は全射なので, 自然な準同型 $W\Omega^{\cdot}_X \to W_n\Omega^{\cdot}_X$ もまた全射.

また, décalage $V: W_n(X) \to W_{n+1}(X)$ によって準同型 $V: W_n\Omega^{i}_X \to W_{n+1}\Omega^{i}_X$ が定義される. このとき,

(1) $xVy = V(FRx.y)$, x は $W_n(X)$ の, y は $W_{n-1}\Omega^i_X$ の local section;

(2) $V(xdy) = (Vx)\, dVy$, x は $W_n\Omega^i_X$ の, y は $W_n\Omega^j_X$ の local section;

(3) $(d\underline{x})Vy = V(\underline{x}^{p-1}d\underline{x}.y)$, x は $\mathcal{O}_X$ の, y は $W_{n-1}\Omega^i_X$ の local section, $\underline{x}$ は x の $W_n(X)$ における multiplicative representative.

が成立する. ここで, $RV = VR$ なので, limit への移行によって $W\Omega^{\cdot}_X$ の自己準同型 V を得る. このとき,

(1)′ $xVy = V(Fx.y)$, x は $W(X)$ の, y は $W\Omega^i_X$ の local section;

(2)′ $V(x.dy) = (Vx)\, dVy$, x は $W\Omega^i_X$ の, y は $W\Omega^j_X$ の local section;

(3)′ $(d\underline{x})\, Vy = V(\underline{x}^{p-1}d\underline{x}.y)$, x は $\mathcal{O}_X$ の, y は $W\Omega^i_X$ の local section, $\underline{x}$ は x の $W(X)$ における multiplicative representative.

また, 環の準同型 $RF = FR: W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ によって graded algebra の準同型 $F: W_n\Omega^{\cdot}_X \to W_{n-1}\Omega^{\cdot}_X$ が定義される. このとき,

(4) $FV = VF = p: W_n\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X$;

(5) $FdV = d: W_n\Omega^i_X \to W_n\Omega^{i+1}_X$;

(6) $dF = pFd: W_n\Omega^i_X \to W_{n-1}\Omega^{i+1}_X$; $Vd = pdV: W_n\Omega^i_X \to W_{n+1}\Omega^{i+1}_X$;

(7) $xVy=V(Fx\cdot y)$, xは$W_n\Omega_X^i$の, yは$W_{n-1}\Omega_X^j$のlocal section;

さらに, limitへの移行によってgraded differential algebra $W\Omega_X^{\cdot}$の自己準同型Fを得る. このとき,

(4)′ $FV=VF=p$;

(5)′ $FdV=d$;

(6)′ $dF=pFd$; $Vd=pdV$;

(7)′ $xVy=V(Fx\cdot y)$, xは$W\Omega_X^i$の, yは$W\Omega_X^j$のlocal section,

が成立する. (特に, (5), (5)′は重要な公式である)

次に, Xをsmooth k-scheme of finite typeとする. $(X/W_n)_{cris}$をW_nに関するXのcrystalline topos, $\mathcal{O}_{X/W_n}$を$(X/W_n)_{cris}$のstructure sheaf, また, X_{zar}をXのZariski topos, $u_{X/W_n}:(X/W_n)_{cris}\to X_{zar}$を自然なtoposのmorphismとする. このとき, $D(X,W_n)$における同型

$$\text{(I)}\quad \mathbb{R}u_{X/W_n*}\mathcal{O}_{X/W_n}\xrightarrow{\sim}W_n\Omega_X^{\cdot}$$

が存在する. これから, $D(W_n)$における同型

$$\text{(II)}\quad \mathbb{R}\Gamma(X/W_n)=\mathbb{R}\Gamma((X/W_n)_{cris},\mathcal{O}_{X/W_n})\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\Gamma(X,W_n\Omega_X^{\cdot}),$$

さらに, cohomology群の同型

$$\text{(III)}\quad H^{\cdot}(X/W_n)_{cris}\xrightarrow{\sim}H^{\cdot}(X,W_n\Omega_X^{\cdot})$$

を得る. さらに, kがXの上にproperなら, 各$H^j(X,W_n\Omega_X^i)$はW_n-module of finite lengthで, $D(W)$における自然な準同型

$$\text{(IV)}\quad \mathbb{R}\Gamma(X,W\Omega_X^{\cdot})\to\mathbb{R}\varprojlim\mathbb{R}\Gamma(X,W_n\Omega_X^{\cdot})$$

は同型. したがって, cohomology群の準同型

$$(\mathrm{V})\ H^*(X, W\Omega_X^\cdot) \to \varprojlim H^*(X, W_n\Omega_X^\cdot)$$

は同型. これから, cohomology群の同型

$$(\mathrm{VI})\ H^*(X/W)_{cris} = \varprojlim H^*(X/W_n)_{cris} \simeq H^*(X, W\Omega_X^\cdot)$$

を得る

remark 2.6 $S=(S, \mathcal{J}, \gamma)$ をPD-scheme, X を S-scheme とし, γ が X に拡張されると仮定する. このとき, $\mathrm{Cris}(X/S)$ の対象 (U, T, δ) に $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ を対応させることによって $\mathrm{Cris}(X/S)$ の上の環の層 $\mathcal{O}_{X/S}$ が定義される. $\mathcal{O}_{X/S}$ を site $\mathrm{Cris}(X/S)$ の, または, topos $(X/S)_{cris}$ の structure sheaf とよぶ.

3. de Rham-Witt complex に伴う spectral sequence

k を標数 $p>0$ の perfect field, $W=W(k)$ を k の上の Witt vector の環, K を W の分数体, また X を smooth proper k-scheme とする. このとき, 次数 i において p^iF によって $W\Omega_X^\cdot$ の complex の自己準同型 $\underline{F}$ が定義される. さらに, $\underline{F}$ から誘導される $H^*(X/W)$ の自己準同型 は crystalline cohomology の上の Frobenius endomorphism と一致する.

さらに, decreasing filtration $(W\Omega^{\geq i}: W\Omega^i \to W\Omega^{i+1} \to \cdots)_{i\geq 0}$ によって spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega_X^i) \Rightarrow H^*(X/W)_{cris}$$

(de Rham-Witt complex に伴う 〈the first spectral sequence〉) を得る. 一方, increasing filtration $(W\Omega^{\leq i}: 0 \to W\Omega^0 \to \cdots \to W\Omega^{i-1} \to Z\Omega^i \to 0)_{i\geq 0}$

によってspectral sequence

$$''E_2^{ij} = H^i(X, \underline{H}^j(W\Omega_X^{\cdot})) \Rightarrow H^*(X/W)_{cris}$$

(de Rham-Witt complexに伴う〈the opposite spectral sequence〉)を得る. ここで, Rから誘導される準同型 $\underline{H}^j(W_n\Omega_X^{\cdot}) \to \underline{H}^j(W_{n-1}\Omega_X^{\cdot})$ は全射. したがって, projective system $(\underline{H}^j(W_n\Omega_X^{\cdot}))_{n>0}$ はMittag-Leffler条件を満たす. これから, $H^i(X, H^j(W\Omega_X^{\cdot})) = \varprojlim H^i(X, \underline{H}^j(W_n\Omega_X^{\cdot}))$

<u>定理</u>3.1. (Illusie-Raynaud) (1) the first spectral sequenceはtorsionを除いてE_1で退化する. さらに, $H^j(X, W\Omega_X^i)\otimes_W K$ は $H^{i+j}(X/W)_{cris}\otimes_W K$ のpart of slopes $[i, i+1[$ に対応する. 特に, $H^j(X, W(X))\otimes_W K$ は $H^j(X/W)_{cris}\otimes_W K$ のpart of slopes $[0, 1[$ に対応する.

(2) the opposite spectral sequenceはtorsionを除いてE_2で退化する. さらに, $H^i(X, \underline{H}^j(W\Omega_X^{\cdot}))\otimes_W K$ は $H^{i+j}(X/W)\otimes_W K$ の part of slopes $]j-1, j]$ に対応する

<u>remark</u> 3.2 定理3.1.(1)はSerre[11], Artin-Mazur[1], Bloch[4]の結果の一般化になっている.

<u>remark</u> 3.3. $E = H^n(X/W)_{cris}\otimes_W K$ とすれば, Eはlinear operator Fを持つKの上の有限次元線型空間. このとき, 有理数 $\lambda = s/r$, $(s, r) = 1$, に対して $E_\lambda = \{a \in E ; F^r a = p^s a\}$ とおけば, 直和分解 $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$ を得る. E_λをEのpart of slope λ とよぶ.

また, さらに,

定理3.4 (Illusie-Raynaud) (1) the first spectral sequence は finite length を除いて E_2 で退化する.

(2) the opposite spectral sequence は finite length を除いて E_3 で退化する.

(3) the first spectral sequence が E_1 で退化する ⇔ the opposite spectral sequence が E_2 で退化する.

したがって, $E_2^{ij} = \mathrm{Ker}(H^j(X, W\Omega_X^i) \to H^j(X, W\Omega_X^{i+1})) / \mathrm{Im}(H^j(X, W\Omega_X^{i-1}) \to H^j(X, W\Omega_X^i))$ は有限型W加群. E_2 は E_∞ の good approximation であると言える.

以下, 定理3.4 (1) の証明の概要を述べる.

Rを次数0で生成元F, Vによって, 次数1で生成元dによって, 次の関係式によって生成されるgraded W-algebraとする.

(1) $F.a = F(a).F$, $a.V = V.F(a)$, aはWの元 ; $FV = VF = p$;

(2) $ad = da$, aはWの元 ; $d^2 = 0$; $FdV = d$.

このとき, $R = R^0 \oplus R^1$, R^0 は Dieudonné-Cartier algebra, R^1 はdによって生成される R^0 の上のbimodule. また, $H^j(X, W\Omega_X^\cdot)$ は operator F, V, d によってRの上のgraded module となる.

ここで, Mを R^0 加群とする. MがV-adic topologyに対してcompleteで, 各 $n > 0$ に対して $M/V^n(M)$ が of finite length となるとき, Mは V-finite であるという. 例えば, $H^j(X, W(X))$ は V-finite.

命題3.5. Mを V-finite R_0-module とする. このとき.

(1) Mの V-torsion part は of finite length.

(2) M が V-torsion-free なる，有限次元の smooth formal group G が存在して G の Cartier module は M に同型となる．さらに，このとき，M が free W-module of finite type $\Leftrightarrow$ G が p-divisible．また，M が F のある巾で 0 になる $\Leftrightarrow$ G が unipotent.

したがって，formal group の exact sequence

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0,$$

G' は G の maximal p-divisible subgroup，G'' は unipotent，に対応して，R_0 加群の exact sequence

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

M' は free W-module，M'' は F のある巾で 0 になる，を得る．

これから，

命題 3.6. M を V-finite R^0-module とする．このとき，M は successive quotient が次のいずれかの型の V-finite module であるような組成列を持つ．(I) of finite length ; (II) W の上に free of finite type ; (III) $\hat{G}_a$ with $F = 0$.

次に，$M^{\cdot} = \bigoplus_i M^i$ を graded $R^{\cdot}$-module とする．このとき，$\mathrm{Fil}^n(M^i) = V^n(M^i) + dV^n(M^{i-1})$ とすれば，$\mathrm{Fil}^n(M^{\cdot}) = \bigoplus_i \mathrm{Fil}^n(M^i)$ は $M^{\cdot}$ の graded W-submodule で，

$$F(\mathrm{Fil}^n(M^{\cdot})) \subset \mathrm{Fil}^{n-1}(M^{\cdot}) ;$$

$$V(\mathrm{Fil}^n(M^{\cdot})) \subset \mathrm{Fil}^{n+1}(M^{\cdot}) ;$$

$$d(\mathrm{Fil}^n(M^{\cdot})) \subset \mathrm{Fil}^n(M^{\cdot}).$$

$\mathrm{Fil}^n(M^\cdot)$ は $M^\cdot$ の decreasing filtration を与える. 例えば, $M^\cdot = H^j(X, W\Omega_X^\cdot)$ とすれば, $\mathrm{Fil}^n(M^\cdot) = \mathrm{Ker}(H^j(X, W\Omega_X^\cdot) \to H^j(X, W_n\Omega_X^\cdot))$.

さらに, $Z^i = \mathrm{Ker}(M^i \xrightarrow{d} M^{i+1})$, $B^i = \mathrm{Im}(M^{i-1} \to M^i)$ とおく. このとき,

(1) Z^i は F で stable であるが, V で stable ではない. また, Va が Z^i の元なる, a もまた Z^i の元. したがって, Z^i は M^i の V-torsion part を含む. さらに, $V^{-\infty}(Z^i) = \{a \in M^i ;$ 任意の $n>0$ に対して $V^n a$ は Z^i の元となる$\}$ とおけば, $V^{-\infty}(Z^i)$ は V で stable な最大の Z^i の部分W加群.

(2) B^i は V で stable であるが, F で stable ではない. $F^\infty(B^i) = \bigcup_{n>0} F^n(B^i)$ とおけば, $F^\infty(B^i)$ は F で stable で B^i を含む最小の M^i の部分W加群.

このとき,

$$0 \subset B^i \subset F^\infty(B^i) \subset V^{-\infty}(Z^i) \subset Z^i \subset M^i$$

となる.

次に, $M^\cdot$ を graded R-module とする. $M^\cdot$ が Fil^n-topology に対して complete で, 各 n, i に対して $M^i/\mathrm{Fil}^n(M^i)$ が of finite length となるとき, $M^\cdot$ は <u>profinite</u> であるという.

<u>定理</u>3.7. (profinite module の構造) $M^\cdot$ を下に有界な profinite graded R-module とする. このとき,

(1) $F^\infty(B^i)/B^i$, $Z^i/V^{-\infty}(Z^i)$ は of finite length.

(2) $F^\infty(B^i)$ は M^i で closed で, V のある巾で 0 になる. また, $\mathrm{Fil}^n(M^i)$ によって $F^\infty(B^i)$ の上に誘導される位相は $dV^{n-1}(M^{i-1})$ によって定義される位相と一致する. さらに, $M^i/F^\infty(B^i)$ は V-finite.

(3) $M^i/V^{-\infty}(Z^i)$ は V-torsion-free V-finite module で，F のある巾で 0 になる.

さらに,

<u>命題</u>3.8. $M^{\cdot}$ を有界な profinite graded R-module とする. このとき, $M^{\cdot}$ は successive quotient が次のいずれかの型の profinite module であるような組成列を持つ.

(I) (one degree) (a) of finite length ; (b) W の上に free of finite type ; (c) $\hat{G}_a$ with $F=0$

(II) (involve two degrees) $k[[T]] \xrightarrow{d} k[[T]]$, on the left $F=0$, $V(T^n)=T^{n+1}$; on the right $V=0$, $F(1)=0$, $F(T^n)=T^{n-1}$ $(n>0)$, で (a) d は全射で長さ l の kernel を持つ, i.e. $d(1)=\cdots=d(T^{l-1})=0$, $d(T^{l+n})=T^n$; (b) d は単射で長さ l の cokernel を持つ, i.e. $d(T^n)=T^{n+l}$.

次に問題になるのは cohomology 群 $H^i(M^{\cdot})=Z^i/B^i$ の有限性である. これについて,

<u>補題</u> 3.9. $M^{\cdot}$ を有界な profinite graded R-module とする. このとき, 次の条件は同値.

(a) 各 i に対して $V^{-\infty}(Z^i)/F^{\infty}(B^i)$ は有限型 W 加群 ;

(b) 各 i に対して $H^i(M^{\cdot})=Z^i/B^i$ は有限型 W 加群 ;

(c) R 加群 $M^{\cdot}$ の組成列に命題 3.8. の (Ic) の型の R 加群は現われない.

graded R-module $M^{\cdot}$ が有界で profinite で補題 3.9. の同値な条件を満たすとき, $M^{\cdot}$ は <u>coherent</u> であるという.

定理 3.10. graded R-module $H^j(X, W\Omega_X^{\cdot})$ は coherent.

これから, 各 E_2^{ij} は有限型 W 加群. ここで, the first spectral sequence は torsion を除いて E_1 で退化するので, finite length を除いて E_2 で退化することがわかる.

4. applications

定理 3.4. から the first spectral sequence の E_1-term について幾つかの結果が得られる.

命題 4.1. $H^0(X, W\Omega_X^i)$ は free W-module (of finite type)

命題 4.2 (Torsten Ekedahl) $H^1(X, W\Omega_X^i)$ は有限型 W 加群.

また, $N = \dim X$ とすれば, F は $W\Omega_X^N$ の上で双射. したがって, $H^j(X, W\Omega_X^N)$ の上で双射. これから,

命題 4.3. $H^j(X, W\Omega_X^N)$ は有限型 W 加群.

したがって, 特に,

定理 4.4. (Nygaard) X を k の上の complete smooth surface とする. このとき, the first spectral sequence は E_2 で退化する. さらに, 次の条件は同値

(a) the first spectral sequence は E_1 で退化する;

(b) $d : H^2(X, W\Omega_X^0) \to H^2(X, W\Omega_X^1)$ は零射;

(c) $H^2(X, W\Omega_X^0)$ は有限型 W 加群;

(d) X の formal Brauer group $\widehat{Br}(X)$ は p-divisible.

supersingular K3 surface は定理4.4.の同値な条件を満たさない例を与える (Nygaard [8],[9]).

references

1. M.Artin-B.Mazur, Formal groups arising from algebraic varieties. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 10 (1977)

2. P. Berthelot, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p>0, LN 407, Springer.

3. P. Bethelot-A.Ogus. Notes on Crystalline cohomology, Math. Notes 21, Princeton.

4. S. Bloch. Algebraic K-theory and crystalline cohomology, Publ. Math. IHES 47 (1978)

5. A. Grothendieck, Crystals and the de Rham cohomology of schemes, in <Dix exposés sur la cohomologie des schémas> North Holland.

6. L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomology crystalline, Ann. Sci Ec Norm. Sup 12 (1979)

7. P. Monsky. Formal cohomology I (with G. Washnitzer) Ann of Math 88 (1968), II ibid 88 (1968), III ibid 93 (1971).

8. N. Nygaard, Closedness of regular 1-forms on algebraic surfaces. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 12 (1979)

9. N. Nygaard, A p-adic proof of the non-existence of vector fields on K3 surfaces. Ann. of Math 110 (1979)

10. A. Ogus, Cohomology of the infinitesimal site. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 8 (1975)

11. J-P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p. Symp. Intern. de Topologia Algebraica, Mexico (1958)

12. J-P. Serre, Quelques propriétés des variétés abeliennes en caractéstique p, Amer. Journ. of Math. 80 (1958)

13. M. Raynaud, Études de la torsion dans la première suite spectrale (preprint)

14. L. Illusie - M. Raynaud, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline (preprint) in Seminaire de Geométrie Algébrique d'Orsay 1979/80.